10 класс

10.1.. В ОАО «Финансовая пирамида» ровно 2021 акционер, причём любые 1100 из них в сумме владеют не менее, чем 50% процентами всех акций общества. Какой максимальной долей акций может владеть один акционер?

Ответ. $\frac{9}{110}$.

Решение. Занумеруем акционеров от 1 до 2021 в порядке возрастания их пакетов акций $a_1 \le a_2 \le ... \le a_{2021}$(в долях от 1), условие задачи эквивалентно тому, что $a_1 + a_2 + ... + a_{1100} \ge \frac{1}{2}$. В таком случае $a_{1100} \ge \frac{1}{2200}$ и $a_{1101} \ge a_{1100} \ge \frac{1}{2200}$.

Следовательно, $a_{1101} + a_{1102} + ... + a_{2020} \ge 920 \cdot \frac{1}{2200} = \frac{92}{220} = \frac{23}{55}$, откуда $a_1 + a_2 + ... + a_{1101} + a_{1102} + ... + a_{2020} \ge \frac{1}{2} + \frac{23}{55} = \frac{101}{110}$ и $a_{2021} \le 1 - \frac{101}{110} = \frac{9}{110}$ - это и есть максимально возможная доля акций, которым может владеть один акционер.

Из решения легко получается пример, когда эта доля достигается, при этом $a_1 = a_2 = ... = a_{2020} = \frac{1}{2200}, a_{2021} = \frac{9}{110}$.

Критерии проверки. (●) Доказано, что $a_{1100} \ge \frac{1}{2200}$: 2 балла. (●) Замечено, что: 2 $a_{1101} \ge a_{1100} \ge \frac{1}{2200}$: 1 балл.

(●) Показано, что $a_{1101} + a_{1102} + ... + a_{2020} \ge 920 \cdot \frac{1}{2200} = \frac{92}{220} = \frac{23}{55}$: 1 балл.

(●) Показано, что $a_1 + a_2 + ... + a_{1101} + a_{1102} + ... + a_{2020} \ge \frac{1}{2} + \frac{23}{55} = \frac{101}{110}$: 1 балл.

(●) Показано, что $a_{2021} \le 1 - \frac{101}{110} = \frac{9}{110}$: 1 балл. (●) Явно приведён пример, когда эта максимальная доля достигается: 1 балл.

10.2.. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность с центром O. Известно, что площадь четырёхугольника AOCD равна половине площади ABCD. Найти величину угла между диагоналями AC и BD.

Ответ. 90°.

Решение. Обозначим величину угла между диагоналями четырёхугольника ABCD за θ, тогда его площадь равна $\frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\theta$.

Обозначим середину диагонали BD за M, тогда площадь четырёхугольника AMCD равна $\frac{1}{2} AC \cdot MD \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BD \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{AOCD}$. Треугольник ACD у четырёхугольников AMCD и AOCD общий, значит равны площади треугольников AMC и AOC. Основание у треугольников AMC и AOC общее, следовательно, равны высоты из вершин M и O, поэтому прямая MO параллельна прямой AC, откуда угол между AC и BD равен углу между AC и OM. Последний угол равен 90°, как угол между хордой BD и отрезком, соединяющим середину M этой хорды и центр окружности O. Следовательно, угол между диагоналями AC и BD равен 90°.

Критерии проверки. (●) Доказано, что угол между AC и BD равен углу между AC и OM: 5 баллов. (●) Доказано, что углу между AC и OM равен 90°: 2 балла.

10.3.. Найти все пятизначные натуральные числа, уменьшающиеся после вычёркивания средней цифры в целое число раз.

Ответ. Все пятизначные числа, делящиеся на 100.

Решение. Обозначим искомое число за $N=\overline{abcde}=1000\overline{ab}+\overline{cde}$, тогда число, полученное вычёркиванием средней цифры, равно $M=\overline{abde}=100\overline{ab}+\overline{de}$. По условию, N делится на M, поэтому и $N-10M=\overline{cde}-\overline{de}0$, являющееся не более, чем трёхзначным числом, делится на четырёхзначное число M. Последнее возможно только в случае равенства числа N-10M нулю. Значит, его последняя цифра, равная e, равна 0, тогда и предпоследняя, равная d, равна 0, а за ней уже и c равна 0. Следовательно, все числа, удовлетворяющие условию задачи, делятся на 1000. С другой стороны, для чисел, делящихся на 1000, условие задачи очевидно выполнено.

Критерии проверки. (●) Замечено, что число N-10M должно делиться на M: 2 балла. (●) Замечено, что N-10M не более, чем трёхзначно: 1 балл. (●)Замечено, что трёхзначное число N-10M делится на четырёхзначное число M только при равенстве первого нулю: 1 балл. (●) Доказано, что, если число $N-10M=\overline{cde}-\overline{de}0$ равно 0. то все цифры c,d,e равны 0: 3 балла.

10.4.. Десять шахматистов за девять дней сыграли полный однокруговой турнир, в ходе которого каждый из них сыграл с каждым ровно одну партию. Каждый день игралось ровно пять партий, каждый шахматист был задействованы ровно в одной из них. Для какого максимального $n\le 9$ можно утверждать, что, независимо от расписания, в конце некоторого игрового дня с номером $k\le 8$ обязательно найдутся n шахматистов, уже сыгравших между собой все положенные в турнире партии?

Ответ. $n=5$.

Решение. К концу восьмого дня каждый шахматист сыграл 8 партий, значит, не сыграл одну. Несыгранные партии разбивают шахматистов на 5 непересекающихся пар. По принципу Дирихле, среди любых шести шахматистов всегда найдутся двое, принадлежащих одной паре, то есть, не сыгравшие друг с другом даже к концу предпоследнего дня турнира. Следовательно, $n\le 5$.

Покажем, что в конце седьмого дня турнира, независимо от расписания, обязательно найдутся пять шахматистов, уже сыгравших между собой все положенные партии, откуда будет следовать, что $n=5$. Построим следующую цепочку шахматистов: первый – любой, второй – тот, с кем сыграл первый в восьмой день, третий – тот, с кем сыграл второй в девятый день, четвёртый –тот, с кем сыграл третий в восьмой день и т.д. Шахматистов конечное число, поэтому в цепочке какой-то момент впервые произойдёт повтор. Он не может случиться ни на каком из шахматистов, кроме первого, иначе повторившийся шахматист должен был бы сыграть не меньше трёх партий за два дня. Следовательно, цепочка замкнётся в цикл чётной длины, так как при движении вдоль неё дни рассматриваемых партий чередуются. Если построенный цикл содержит всех 10 шахматистов, останавливаемся, если нет – выбираем любого шахматиста, не вошедшего в него и повторяем процедуру построения цикла. Новый цикл не пересечётся с уже построенным. После нескольких шагов мы построим несколько циклов чётной, не меньшей 4, длины, включающих всех 10 шахматистов (вариантов немного – либо 10, либо 6+4). Выберем из каждого цикла половину его участников, через одного, всего 5 шахматистов. Никакие двое из них не расположены в циклах радом, поэтому не играли между собой в восьмой и девятый дни.

Следовательно, все партии между собой они сыграли в первые 7 дней. Значит, $n \ge 5$, откуда в итоге $n = 5$. При этом $k = 7$.

Критерии проверки. (●) Доказательство того, что $n \le 5$: 3 балла. (●) Доказательство того, что $n \ge 5$: 4 балла.

10.5.. Найти максимальное значение суммы $x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_6(1-x_7)+x_7(1-x_1)$ для произвольных чисел $x_1, x_2,.., x_7$ из интервала $[0,1]$.

Ответ. 3.

Решение. Выделим в левой части неравенства все слагаемые, содержащие переменную x_1, получим $x_1(1-x_2-x_7)$. При фиксированных остальных переменных, данное выражение, а значит и вся левая часть, достигает максимума при $x_1 = 1$, если $x_2 + x_7 < 1$ и при $x_1 = 0$, если $x_2 + x_7 \ge 1$. Следовательно. если мы заменим каждую переменную, начиная с x_1 по x_7 на 1 или 0 в соответствии с условием, будет ли сумма соседних с ней переменных меньше 1 или не меньше 1, мы не уменьшим значение суммы в правой части неравенства. Значит, максимум правой части достигается для набора $x_1, x_2,.., x_7$, в котором каждая переменная равна 1 или 0. Кроме того, в таком наборе две соседних переменных не могут принимать значения 1, так как в этом случае вторая из них не могла появиться в силу правил замены. Следовательно, набор содержит не больше 3 единиц, а остальные – нули, значит, из слагаемых в правой части неравенства не больше трёх ненулевых, очевидно, не превосходящих 1, и вся сумма не больше 3. Пример, когда значение 3 достигается: $x_1 = x_3 = x_5 = 1$, остальные равны 0.

Критерии проверки. Доказано, что максимум суммы не превосходит 3: 5 баллов. Пример, когда значение 3 достигается: 2 балла.